Integrasi Numerik

(Bag. 1)

Bahan Kuliah IF4058 Topik Khusus Informatika I

Oleh; Rinaldi Munir (IF-STEI ITB)

Persoalan Integrasi Numerik

Hitunglah nilai Integral-Tentu

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

yang dalam hal ini:

- *a* dan *b* batas-batas integrasi,
- *f* adalah fungsi yang dapat diberikan secara eksplisit dalam bentuk persamaan ataupun secara empirik dalam bentuk tabel nilai.

- Contoh integral fungsi eksplisit:

$$\int_{0}^{2} (6x^3 - x^2 + \cos(x) - e^x)dx$$

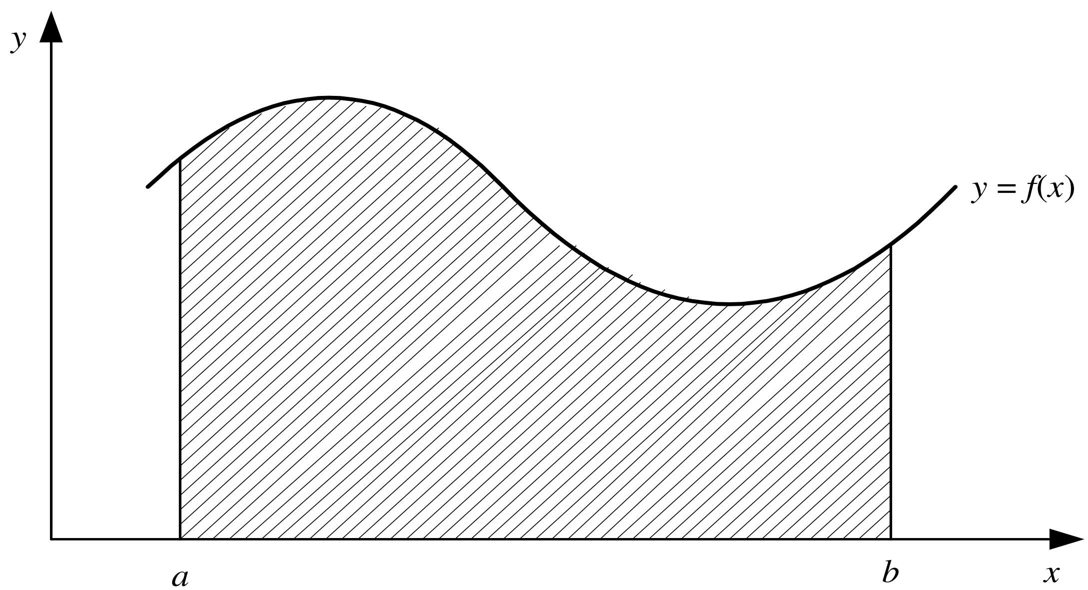
- Contoh integral dalam bentuk tabel (fungsi implisit):

x	$f(x)$
0.00	6.0
0.25	7.5
0.50	8.0
0.75	9.0
1.00	8.5

Hitung: $\int_{0.0}^{1.0} f(x)dx$

Tafsir Geometri Integral Tentu

- Nilai integral-tentu = luas daerah di bawah kurva



$$I = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$ = luas daerah yang dibatasi oleh kurva *y* = *f*(*x*), garis *x* = *a* dan garis *x* = *b*

Contoh persoalan integral

1. Dalam bidang teknik elektro/kelistrikan, telah diketahui bahwa harga rata-rata suatu arus listrik yang berosilasi sepanjang satu periode boleh nol. Disamping kenyataan bahwa hasil netto adalah nol, arus tersebut mampu menimbulkan kerja dan menghasilkan panas. Karena itu para rekayasawan listrik sering mencirikan arus yang demikian dengan persamaan

$$I_{RMS} = \sqrt{\frac{\int_0^T i^2(t)\,dt}{T}}$$

yang dalam hal ini I_{RMS} adalah arus *RMS* (*root-mean-square*), T adalah periode, dan $i(t)$ adalah arus pada rangkaian, misalnya

$$i(t) = 5e^{-2t} \sin 2\pi t \qquad \text{untuk } 0 \le t \le T/2$$
$$= 0 \qquad \text{untuk } T/2 \le t \le T$$

2. Pengukuran fluks panas matahari yang diberikan oleh tabel berikut:

Waktu, jam	Fluks panas q, kalori/cm/jam
0	0.1
1	1.62
2	5.32
3	6.29
4	7.8
5	8.81
6	8.00
7	8.57
8	8.03
9	7.04
10	6.27
11	5.56
12	3.54
13	1.0
14	0.2

Data yang ditabulasikan pada tabel ini memberikan pengukuran fluks panas q setiap jam pada permukaan sebuah kolektor sinar matahari. Anda diminta memperkiraan panas total yang diserap oleh panel kolektor seluas 150.000 cm^2 selama waktu 14 jam. Panel mempunyai kemangkusan penyerapan (*absorption*), e_{ab}, sebesar 45%. Panas total yang diserap diberikan oleh persamaan

$$H = e_{ab} \int_0^t qA\,dt$$

Klasifikasi Metode Integrasi Numerik

1. **Metode Pias**

   Daerah integrasi dibagi atas sejumlah pias (*strip*) yang berbentuk segiempat. Luas daerah integrasi dihampiri dengan luas seluruh pias.

2. **Metode Newton-Cotes**

   Fungsi *integrand* $f(x)$ dihampiri dengan polinom interpolasi $p_n(x)$. Selanjutnya, integrasi dilakukan terhadap $p_n(x)$.

3. **Kuadratur Gauss.**

   Nilai integral diperoleh dengan mengevaluasi nilai fungsi pada sejumlah titik tertentu di dalam selang [-1, 1], mengalikannya dengan suatu konstanta, kemudian menjumlahkan keseluruhan perhitungan.

Metode-Metode Pias

- Selang integrasi [*a, b*] menjadi *n* buah pias (*strip*) atau segmen. Lebar tiap pias adalah

$$h = \frac{b-a}{n}$$

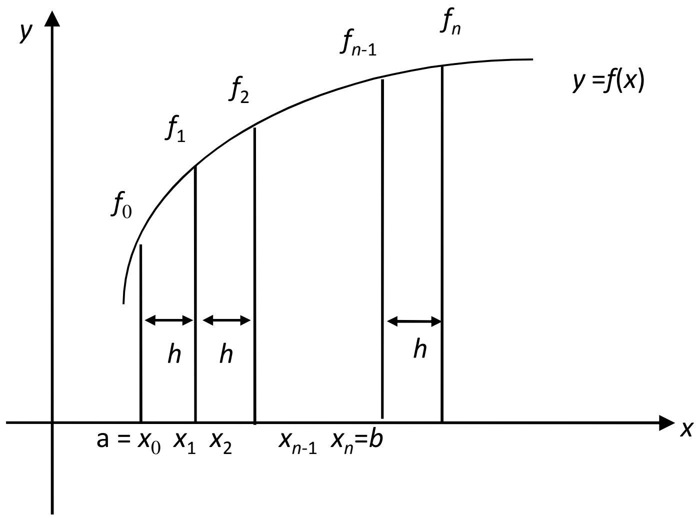
- Titik absis pias dinyatakan sebagai

$$x_r = a + rh, \qquad r = 0, 1, 2, ..., n$$

dan nilai fungsi pada titik absis pias adalah

$$f_r = f(x_r)$$

r	x_r	f_r
0	x_0	f_0
1	x_1	f_1
2	x_2	f_2
3	x_3	f_3
4	x_4	f_4
…	…	…
n-2	x_{n-2}	f_{n-2}
n-1	x_{n-1}	f_{n-1}
n	x_n	f_n



Gambar 6.2 Metode pias

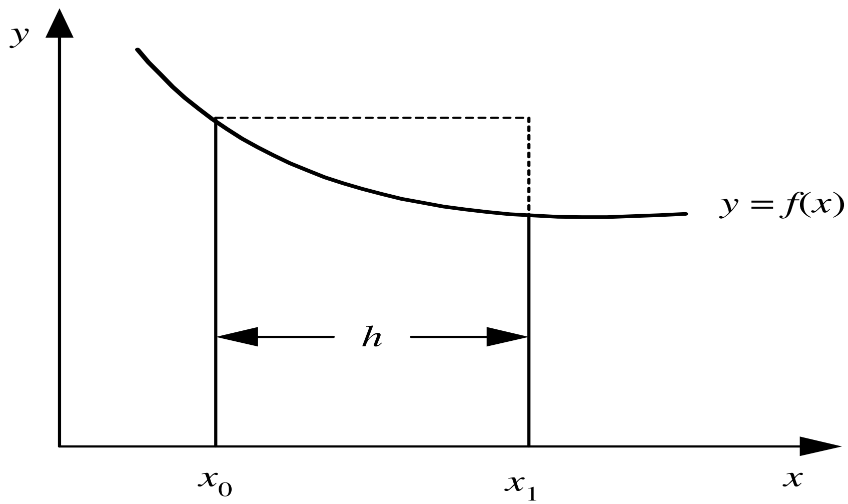
- Kaidah integrasi numerik yang dapat diturunkan dengan metode pias adalah:
  1. Kaidah segiempat (*rectangle rule*)
  2. Kaidah trapesium (*trapezoidal rule*)
  3. Kaidah titik tengah (*midpoint rule*)

- Dua kaidah pertama pada hakekatnya sama, hanya cara penurunan rumusnya yang berbeda

- Kaidah yang ketiga, kaidah titik tengah, merupakan bentuk kompromi untuk memperoleh nilai hampiran yang lebih baik.

Kaidah Segiempat (*Rectangle Rule*)

Pandang sebuah pias berbentuk empat persegi panjang dari $x = x_0$ sampai $x = x_1$ berikut



Luas satu pias adalah (tinggi pias = $f(x_0)$)

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx hf(x_0)$$

atau (bila tinggi pias = $f(x_1)$)

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx hf(x_1)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx hf(x_0)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx hf(x_1) \qquad +$$

$$2\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx h\,[f(x_0) + f(x_1)]$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\,[f(x_0) + f(x_1)]$$ (Kaidah Segiempat)

- **Kaidah segiempat gabungan** (*composite rectangle's rule*):

$$\int_a^b f(x)dx \approx hf(x_0) + hf(x_1) + hf(x_2) + \ldots + hf(x_{n\text{-}1})$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx hf(x_1) + hf(x_2) + hf(x_3) + \ldots + hf(x_n) \qquad +$$

$$2\int_a^b f(x)dx \approx hf(x_0) + 2hf(x_1) + 2hf(x_2) + \ldots + 2hf(x_{n\text{-}1}) + hf(x_n)$$

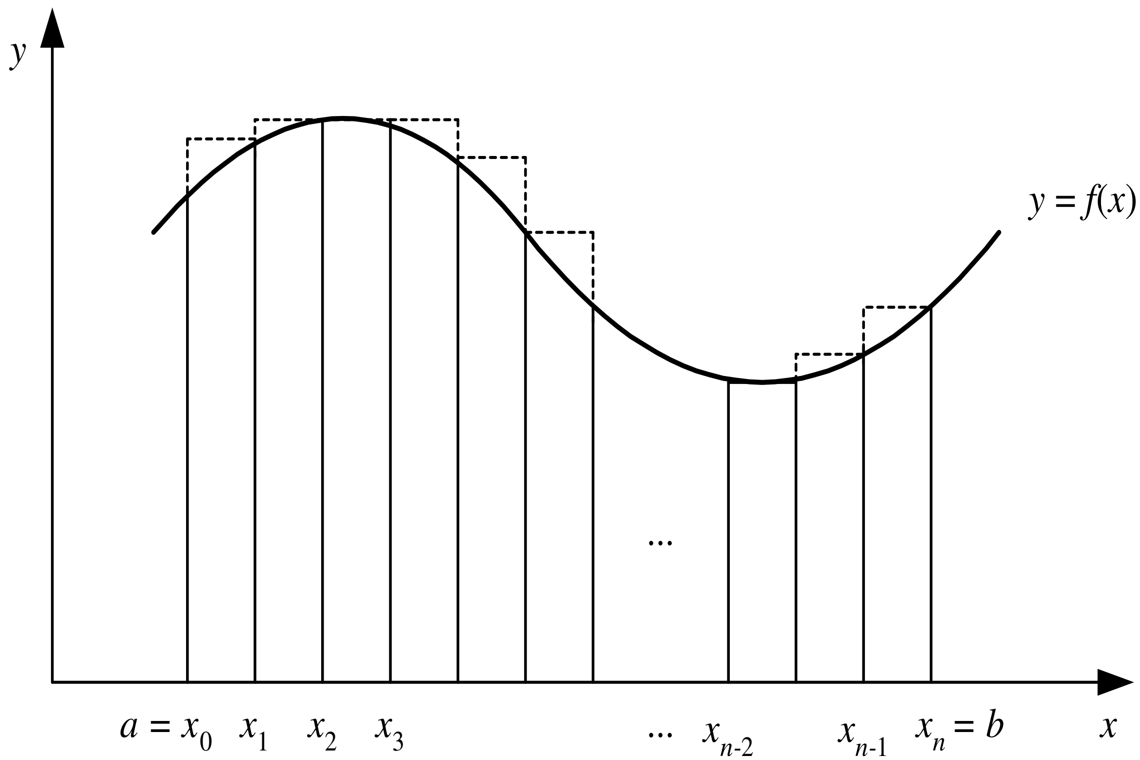
$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}f(x_0) + hf(x_1) + hf(x_2) + \ldots + hf(x_{n\text{-}1}) + \frac{h}{2}f(x_n)$$

Jadi, kaidah segiempat gabungan adalah

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n) = \frac{h}{2}(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n)$$

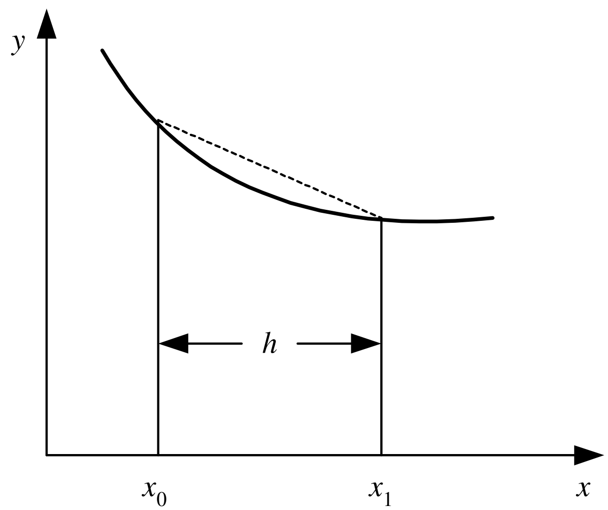
dengan $f_r = f(x_r)$, $r = 0, 1, 2, \ldots, n$.



Gambar Kaidah segiempat gabungan

Kaidah Trapesium

Pandang sebuah pias berbentuk trapesium dari $x = x_0$ sampai $x = x_1$ berikut



Luas satu trapesium adalah

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_0)]$$

- **Kaidah trapesium gabungan** (*composite trapezoidal's rule*):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\approx \frac{h}{2}\,[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}\,[f(x_1) + f(x_2)] + \ldots + \frac{h}{2}\,[f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$\approx \frac{h}{2}\,[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

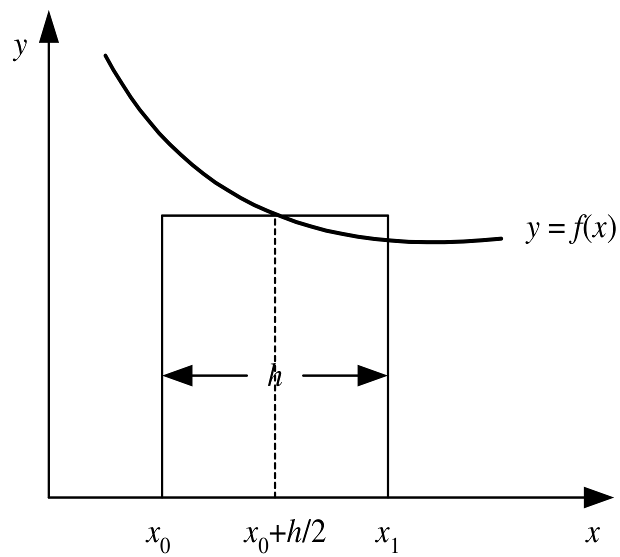
$$\approx \frac{h}{2}\,(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_1 + f_n)$$

dengan $f_r = f(x_r)$, $r = 0, 1, 2, \ldots, n$.

```
procedure trapesium(a, b : real; n: integer; var I : real);
{ Menghitung integrasi f(x) di dalam selang [a, b] dan jumlas pias
  adalah n dengan menggunakan kaidah trapesium.
  K.Awal : nilai a, b, dan n sudah terdefinisi
  K.Akhir: I adalah hampiran integrasi yang dihitung dengan kaidah
           segi-empat.
}
var
   h, x, sigma: real;
   r : integer;
begin
   h:=(b-a)/n;          {lebar pias}
   x:=a;                {awal selang integrasi}
   I:=f(a) + f(b);
   sigma:=0;
   for r:=1 to n-1 do
    begin
      x:=x+h;
      sigma:=sigma + 2*f(x);
    end;
   I:=(I+sigma)*h/2;    { nilai integrasi numerik}
end;
```

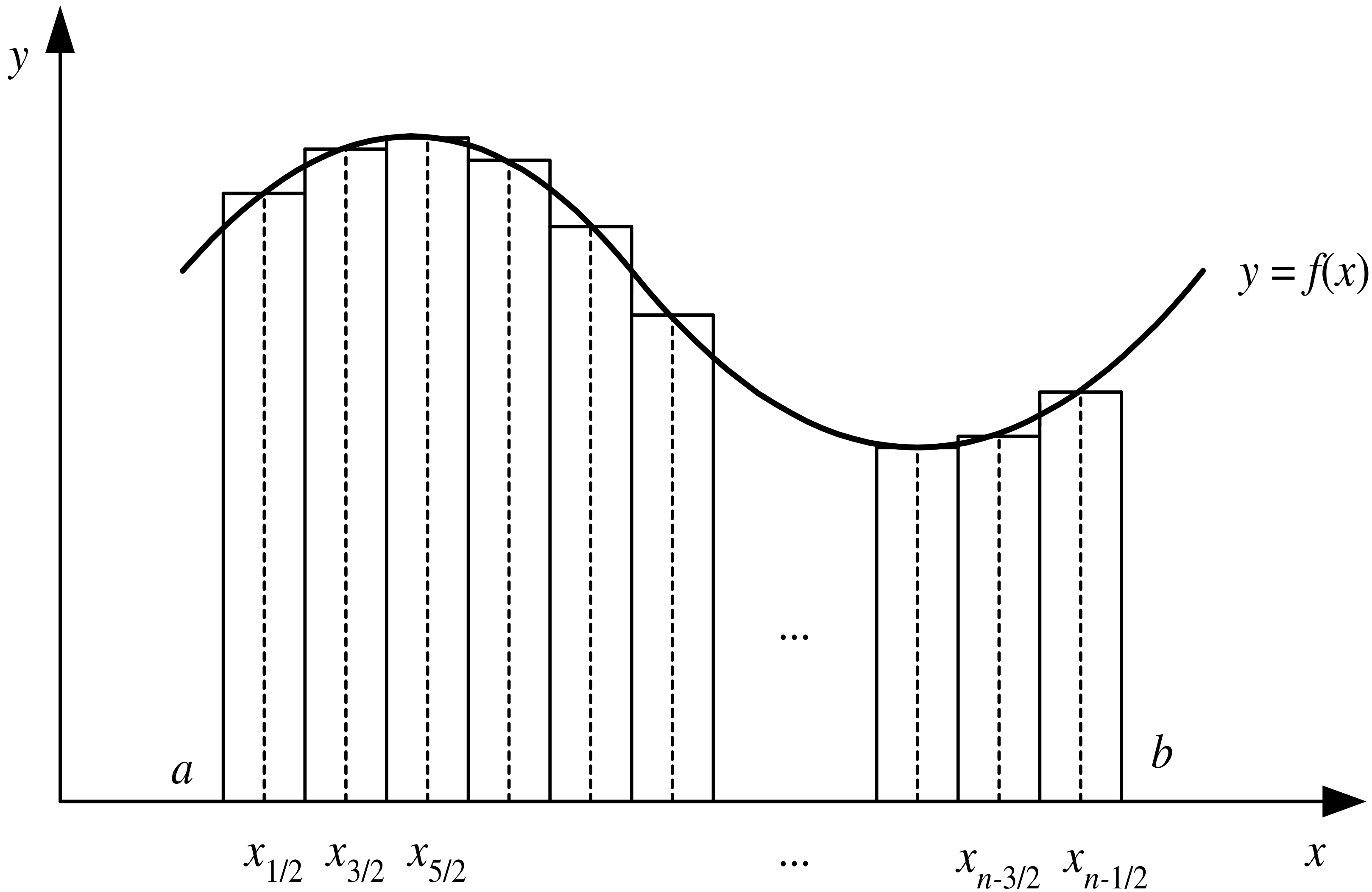
Kaidah Titik Tengah

- Pandang sebuah pias berbentuk empat persegi panjang dari $x = x_0$ sampai $x = x_1$ dan titik tengah absis $x = x_0 + h/2$



Luas satu pias adalah

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx h\, f(x_0 + h/2) \approx h\, f(x_{1/2})$$


y
y = f(x)
...
a
b
x1/2
x3/2
x5/2
...
xn-3/2
xn-1/2
x

Kaidah titik-tengah gabungan adalah

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\approx hf(x_{1/2}) + hf(x_{3/2}) + hf(x_{5/2}) + hf(x_{7/2}) + \ldots + hf(x_{n\text{-}1/2})$$

$$\approx h(f_{1/2} + f_{3/2} + \ldots + f_{n\text{-}1/2}) \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f_{i+1/2}$$

yang dalam hal ini,

$$x_{r+1/2} = a + (r+1/2)h)$$

dan

$$f_{r+1/2} = f(x_{r+1/2}) \qquad r = 0,1,2,..,n\text{-}1$$

```
procedure titik_tengah(a, b : real; n: integer; var I : real);
{ menghitung integrasi f(x) dalam selang [a, b] dengan jumlah pias
  sebanyak n.
  K.Awal : harga a, b, dan n sudah terdefinisi
  K.Akhir: I adalah hampiran integrasi yang dihitung dengan kaidah
           titik-tengah
}
var
   h, x, sigma : real;
   r : integer;
begin
   h:=(b-a)/n;    {lebar pias}
   x:= a+h/2;     {titik tengah pertama}
   sigma:=f(x);
   for r:=1 to n-1 do
    begin
      x:=x+h;
      sigma:=sigma + f(x)
    end;
   I:=sigma*h;            { nilai integrasi numerik}
end;
```

- **Contoh**: Hitung integral $\int_{1.8}^{3.4} e^x dx$ dengan kaidah trapesium. Ambil h = 0.2. Gunakan 5 angka bena.

  Penyelesaian:

  Fungsi *integrand*-nya adalah

  $f(x) = e^x$

  Jumlah pias adalah $n = (b-a)/h = (3.4 - 1.8)/0.2 = 8$

  Tabel data diskritnya adalah sebagai berikut:

r	x_r	$f(x_r)$	r	x_r	$f(x_r)$
0	1.8	6.050	5	2.8	16.445
1	2.0	7.389	6	3.0	20.086
2	2.2	9.025	7	3.2	24.533
3	2.4	11.023	8	3.4	29.964
4	2.6	13.464			

Nilai integrasinya,

$$\int_{1.8}^{3.4} e^x dx \approx \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_6 + 2f_7 + f_8)$$

$$\approx \frac{0.2}{2} [[6.050 + 2(7.389) + 2(9.025) + \ldots + 2(16.445)$$

$$+ 2(20.086) + 2(24.533) + 29.964]$$

$$\approx 23.994$$

Nilai integrasi sejatinya adalah

$$\int_{1.8}^{3.4} e^x dx = e^x \Big|_{x=1.8}^{x=3.4} = e^{3.4} - e^{1.8} = 29.964 - 6.050 = 23.914$$

Galat Metode-Metode Pias

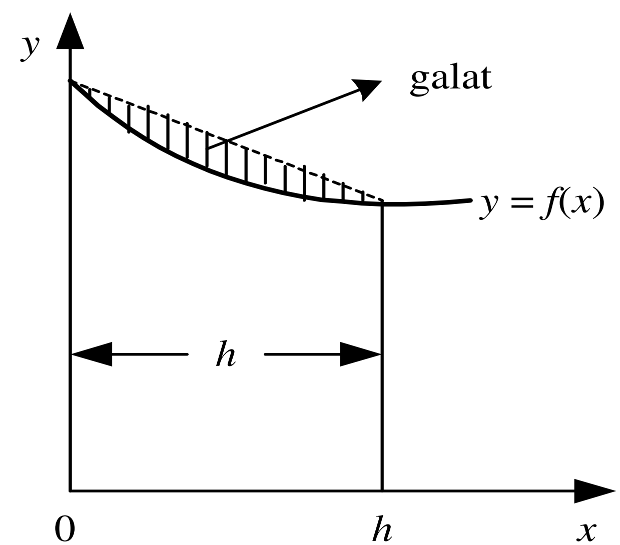
- Galat:

  $E = I - I'$

- yang dalam hal ini *I* adalah nilai integrasi sejati dan *I* ' adalah integrasi secara numerik.

- Galat kaidah trapesium:

$$E = \int_0^h f(x)dx - \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$$



Galat untuk satu buah pias adalah

$$E = \int_0^h f(x)dx - \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$$

Uraikan f(x) dan $f_1 = f(x_1) = f(h)$ ke dalam deret Taylor di sekitar $x_0 = 0$

$$E = \int_0^h [f_0 + xf_0' + \frac{1}{2}x^2 f_0'' + \frac{1}{6}x^3 f_0''' + \ldots]dx - \frac{h}{2}f_0 - \frac{h}{2}[f_0 + hf_0' + \frac{1}{2}h^2 f_0'' + \ldots]$$

$$= xf_0 + 1/2\, x^2 f_0' + 1/6\, x^3 f_0''' + ..\Big]_0^h - 1/2\, hf_0 - 1/2h\, f_0 - 1/2\, h^2 f_0' - 1/4\, h^3 f_0''' - \ldots$$

$$= (hf_o + 1/2\, h^2 f'_0 + 1/6\, h^3 f''_0 + \ldots) - (hf_0 + 1/2\, h^2 f'_0 + 1/4\, h^3 f_0''' + \ldots)$$

$$= -\frac{1}{12}h^3 f_0'' + \ldots$$

$$\approx -\frac{1}{12}h^3 f''(t), \qquad 0 < t < h$$

$$\approx O(h^3)$$

Jadi,

$$\int_0^h f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + O(h^3)$$

Untuk n buah pias, galat keseluruhan (total) adalah

$$E_{tot} \approx -\frac{h^3}{12}(f_0'' + f_1'' + f_2'' + \ldots + f''_{n-1})$$

yang dapat disederhanakan dengan teorema nilai antara untuk penjumlahan menjadi

$$E_{tot} \approx -\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n-1} f_i''$$

$$\approx -n\frac{h^3}{12} f''(t) \qquad , a < t < b$$

Mengingat

$$h = \frac{b-a}{n}$$

maka

$$E_{tot} \approx -n \, \frac{h^3}{12} \, f''(t)$$

$$\approx -n \, \frac{b-a}{n} \, \frac{h^3}{12} f''(t)$$

$$\approx -\frac{h^3}{12} (b-a) f''(t)$$

$$\approx O(h^2)$$

Dengan demikian,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \left(f_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n\right) + O(h^2)$$

- Galat kaidah titik-tengah:

Galat untuk satu buah pias adalah

$$E = \int_0^h f(x)dx - hf_{1/2}$$

Dengan cara penurunan yang sama seperti pada kaidah trapesium, dapat dibuktikan bahwa

$$E \approx \frac{h^3}{24} f''(t),\ 0 < t < h$$

Galat untuk seluruh pias adalah

$$\begin{aligned} E_{tot} &\approx n \frac{h^3}{24} f''(t), \qquad a < t < b \\ &\approx \frac{h^2}{24}(b - a) f''(t) \\ &= O(h^2) \end{aligned}$$

Galat integrasi dengan kaidah titik tengah sama dengan 1/2 kali galat pada kaidah trapesium

Metode-Metode Newton-Cotes

- Metode *Newton-Cotes* adalah metode yang umum untuk menurunkan kaidah integrasi numerik.
- Polinom interpolasi menjadi dasar metode Newton-Cotes.
- Gagasannya adalah menghampiri fungsi *f(x)* dengan polinom interpolasi $p_n(x)$

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_n(x)dx$$

yang dalam hal ini,

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

- Sembarang polinom interpolasi yang telah kita bahas sebelumnya dapat digunakan sebagai hampiran fungsi

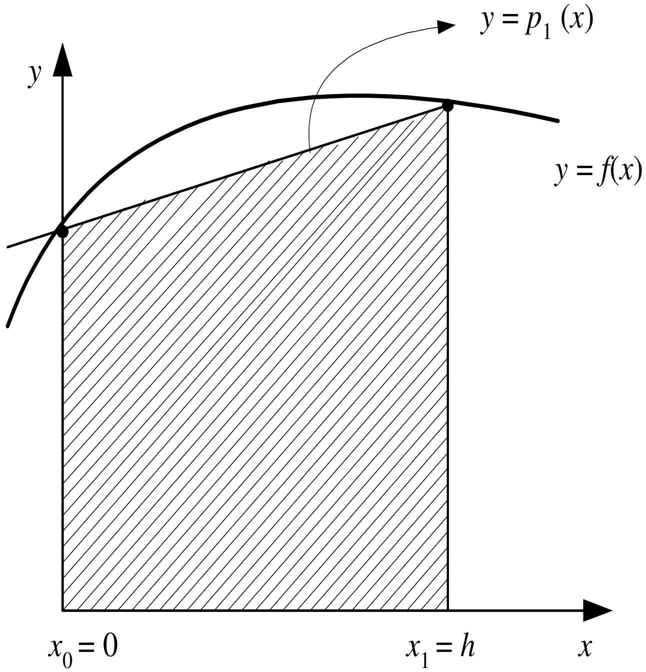
- Tetapi dalam kuliah ini polinom interpolasi yang kita pakai adalah polinom Newton-Gregory maju*:*

$$p_n(x) = f_0 + (x - x_0)\frac{\Delta f_0}{1!h} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2} + \ldots +$$

$$(x - x_0)(x - x_1). ..(x - x_{n-1})\frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}$$

- Kaidah integrasi numerik yang diturunkan dari metode Newton-Cotes, tiga di antaranya yang terkenal adalah:
  1. Kaidah trapesium (*Trapezoidal rule*)
  2. Kaidah Simpson 1/3 (*Simpson's 1/3 rule*)
  3. Kaidah Simpson 3/8 (*Simpson's 3/8 rule*)

Kaidah Trapesium (lagi)



Polinom interpolasi Newton-Gregory derajat 1 yang melalui kedua buah titik itu adalah

$$p_1(x) = f(x_0) + x\frac{\Delta f(x_0)}{h} = f_0 + x\frac{\Delta f_0}{h}$$

Integrasikan $p_1(x)$ di dalam selang [0,1]:

$$I \approx \int_0^h f(x)dx \approx \int_0^h p_1(x)dx$$

$$\approx \int_0^h (f_0 + x \frac{\Delta f_0}{h})\, dx$$

$$\approx x f_0 + \frac{x^2}{2h} \Delta f_0 \Big|_{x=0}^{x=h}$$

$$\approx h f_0 + \frac{h}{2}\Delta f_0$$

$$\approx h f_0 + \frac{h}{2}(f_1 - f_0) \qquad \text{, sebab } \Delta f_0 = f_1 - f_0$$

$$\approx \frac{h}{2} f_0 + \frac{h}{2} f_1$$

$$\approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$$

Jadi, kaidah trapesium adalah

$$\int_0^h f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$$

sama seperti yang diturunkan
Dengan metode pias

Kaidah trapesium untuk integrasi dalam selang [0, *h*] kita perluas untuk menghitung

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

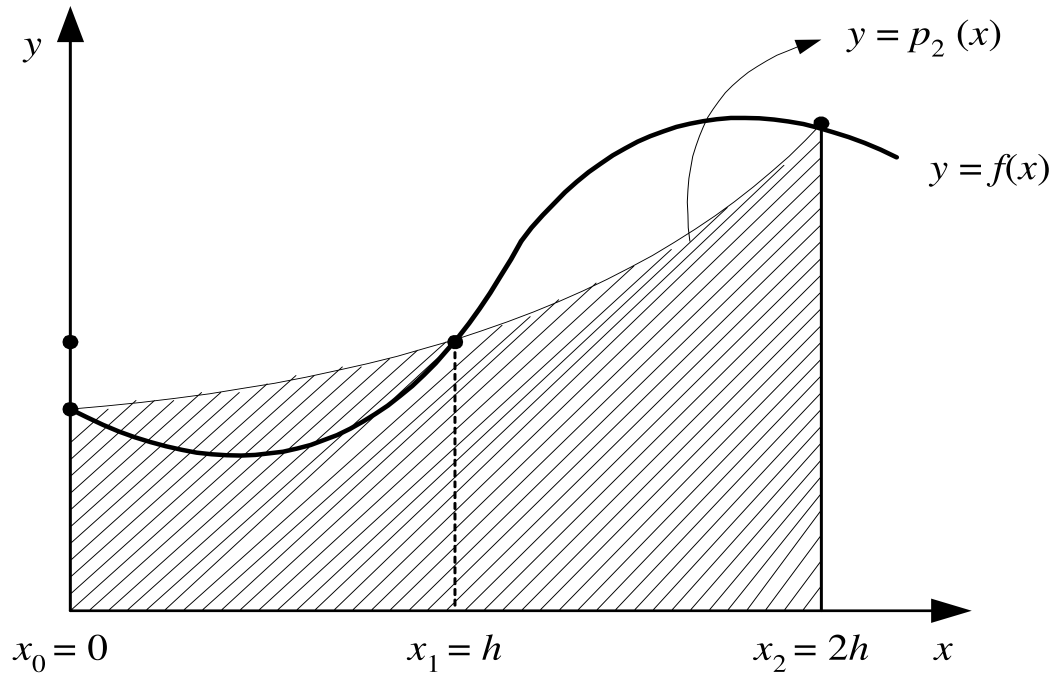
$$\approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + \frac{h}{2}(f_1 + f_2) + \ldots + \frac{h}{2}(f_{n-1} + f_n)$$

$$\approx \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n)$$

$$\approx \frac{h}{2}(f_0 + 2f_i + \sum_{i=1}^{n-1} f_n)$$

Kaidah Simpson 1/3

- Hampiran nilai integrasi yang lebih baik dapat ditingkatkan dengan mengunakan polinom interpolasi berderajat yang lebih tinggi.
- Misalkan fungsi $f(x)$ dihampiri dengan polinom interpolasi derajat 2 yang grafiknya berbentuk parabola.
- Luas daerah yang dihitung sebagai hampiran nilai integrasi adalah daerah di bawah parabola.
- Untuk itu, dibutuhkan 3 buah titik data, misalkan $(0, f(0))$, $(h, f(h))$, dan $(2h, f(2h))$.



Polinom interpolasi Newton-Gregory derajat 2 yang melalui ketiga buah titik tersebut adalah

$$p_2(x) = f(x_0) + \frac{x}{h}\,\Delta f(x_0) + \frac{x(x-h)}{2!h^2}\,\Delta^2 f(x_0) = f_0 + x\,\Delta f_0 + \frac{x(x-h)}{2!h^2}\,\Delta^2 f_0$$

Integrasikan $p_2(x)$ di dalam selang $[0, 2h]$:

$$I \approx \int_0^{2h} f(x)dx \approx \int_0^{2h} p_2(x)dx$$

$$\approx \int_0^{2h} \left(f_0 + \frac{x}{h}\,\Delta f_0 + \frac{x(x-h)}{2!\,h^2}\,\Delta^2 f_0\right) dx$$

$$\approx f_0 x + \frac{1}{2h}\,x^2\,\Delta f_0 + \left(\frac{x^3}{6h^2} - \frac{x^2}{4h}\right)\Delta^2 f_0 \,\Bigg|_{x=0}^{x=2h}$$

$$\approx 2hf_0 + \frac{4h^2}{2h}\,\Delta f_0 + \left(\frac{8h^3}{6h^2} - \frac{4h^2}{4h}\right)\Delta^2 f_0$$

$$\approx 2hf_0 + 2\mathrm{h}\,\Delta f_0 + \left(\frac{4h}{3} - h\right)\Delta^2 f_0$$

$$\approx 2hf_0 + 2h\,\Delta f_0 + \frac{h}{3}\,\Delta^2 f_0$$

Mengingat

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0$$

dan

$$\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0 = (f_2 - f_1) - (f_1 - f_0) = f_2 - 2f_1 + f_0$$

maka, selanjutnya

$$I \approx 2hf_0 + 2h(f_1 - f_0) + \frac{h}{3}(f_2 - 2f_1 + f_0)$$

$$\approx 2hf_0 + 2hf_1 - 2hf_0 + \frac{h}{3} f_2 - \frac{2h}{3} f_1 + \frac{h}{3} f_0$$

$$\approx \frac{h}{3} f_0 + \frac{4h}{3} f_1 + \frac{h}{3} f_2$$

$$\approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

(Kaidah Simpson 1/3)

- Kaidah Simpson 1/3 gabungan:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4) + \ldots + \frac{h}{3}(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

$$\approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \ldots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

$$\approx \frac{h}{3}\left(f_0 + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f_i + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} f_i + f_n\right)$$

Ingat pola koefisien dalam rumus Simpson 1/3:
1, 4, 2, 4, 2, ... ,2, 4, 1

- Penggunaan kaidah 1/3 Simpson mensyaratkan jumlah upaselang (n) harus genap.

- Ini berbeda dengan kaidah trapesium yang tidak mempunyai persyaratan mengenai jumlah selang.

```
procedure Simpson_sepertiga(a, b : real; n: integer; var I : real);
{ menghitung integrasi f(x) dalam selang [a, b] dengan jumlah pias
  sebanyak n (n harus genap}
  K.Awal : harga a, b, dan n sudah terdefinisi (n harus genap)
  K.Akhir: I adalah hampiran integrasi yang dihitung dengan kaidah
           Simpson 1/3
}
var
   h, x, sigma : real;
   r : integer;
begin
   h:=(b-a)/n;    {jarak antar titik }
   x:=a; {awal selang integrasi}
   I:=f(a) + f(b);
   sigma:=0;
   for r:=1 to n-1 do
    begin
      x:=x+h;
      if r mod 2 = 1 then { r = 1, 3, 5, ..., n-1 }
         sigma:=sigma + 4*f(x)
      else                    { r = 2, 4, 6, ..., n-2 }
         sigma:=sigma + 2*f(x);
    end;
   I:=(I+sigma)*h/3;      { nilai integrasi numerik}
end;
```

- **Contoh**: Hitung integral $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$ dengan menggunakan
  a. kaidah trapesium
  b. kaidah titik-tengah
  c. kaidah Simpson 1/3

  Gunakan jarak antar titik h = 0.125.

Penyelesaian:

Jumlah upaselang: $n = (1 - 0)/0.125 = 8$

Tabel titik-titik di dalam selang [0,1]:
(untuk kaidah trapesium dan Simpson 1/3)

r	x_r	f_r
0	0	1
1	0.125	0.88889
2	0.250	0.80000
3	0.375	0.72727
4	0.500	0.66667
5	0.625	0.61538
6	0.750	0.57143
7	0.875	0.53333
8	1.000	0.50000

Tabel titik-titik di dalams elang [0, 1]:
(untuk kaidah titik-tengah)

r	x_r	f_r
1/2	0.063	0.94118
3/2	0.188	0.84211
5/2	0.313	0.76190
7/2	0.438	0.69565
9/2	0.563	0.64000
11/2	0.688	0.59259
13/2	0.813	0.55172
15/2	0.938	0.51613

(a) dengan kaidah trapesium

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \approx h/2\,(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 + 2f_5 + 2f_6 + 2f_7 + f_8)$$

$$\approx 0.125/2\,[1 + 2(0.88889) + 2(0.80000) + ... + 0.50000)$$

$$\approx 0.69412$$

(b) dengan kaidah titik-tengah

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \approx h\,(f_{1/2} + f_{3/2} + f_{5/2} + f_{7/2} + f_{9/2} + f_{11/2} + f_{13/2} + f_{15/2})$$

$$\approx 0.125\,(5.54128)$$

(c) dengan kaidah 1/3 Simpson

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \approx h/3\,(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + 2f_6 + 4f_7 + f_8)$$

$$\approx 0.125/3\,(16.63568)$$

$$\approx 0.69315$$

Bandingkan solusi (a), (b), dan (c) dengan solusi sejatinya:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(1+x)\Big|_{x=0}^{x=1} = \ln(2) - \ln(1) = 0.69314718$$

Galat Kaidah Simpson 1/3

Galat kaidah Simpson 1/3 untuk dua pasang upaselang adalah

$$E = \int_0^{2h} f(x)dx - \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) \qquad \text{(P.6.29)}$$

Uraikan $f(x)$, f_1, dan f_2 masing-masing ke dalam deret Taylor di sekitar $x_0 = 0$:

$$f(x) = f_0 + xf_0' + \frac{x^2}{2} f_0'' + \frac{x^3}{6} f_0''' + \frac{x^4}{24} f_0^{(iv)} + \ldots \qquad \text{(P.6.30)}$$

$$f_1 = f(h) = f_0 + hf_0' + \frac{h^2}{2} f_0'' + \frac{h^3}{6} f_0''' + \frac{h^4}{24} f_0^{(iv)} + \ldots \qquad \text{(P.6.31)}$$

$$f_2 = f(2h) = f_0 + 2h f_0' + \frac{4h^2}{2} f_0'' + \frac{8h^3}{6} f_0''' + \frac{16h^4}{24} f_0^{(iv)} + \ldots \qquad \text{(P.6.32)}$$

Sulihkan persamaan (P.6.30), (P.6.31), (P.6.32) ke dalam persamaan (P.6.29):

$$E = \int_0^{2h} (f_0 + xf_0' + \frac{x^2}{2} f_0'' + \frac{x^3}{6} f_0''' + \frac{x^4}{24} f_0^{(iv)} + ...)\, dx$$

$$- \frac{h}{3} [(f_0 + 4f_0 + 4hf_0' + \frac{4h^2}{2} f_0'' + \frac{4h^3}{6} f_0''' + \frac{4h^4}{24} f_0^{(iv)} + ...)$$

$$+ (f_0 + 2hf_0' + \frac{4h^2}{2} f_0'' + \frac{8h^3}{6} f_0''' + \frac{16h^4}{24} f_0^{(iv)} + ...)]$$

$$= (xf_0 + \frac{x^2}{2} f_0' + \frac{x^3}{6} f_0'' + \frac{x^4}{24} f_0''' + \frac{x^5}{120} f_0^{(iv)} + ...) \Big|_{x=0}^{x=2h}$$

$$- \frac{h}{3} (6f_0 + 6hf_0' + 4h^2 f_0'' + 2h^3 f_0''' + \frac{20h^4}{24} f_0^{(iv)} + ...)$$

$$= (2hf_0 + 2h^2 f_0' + \frac{4h^3}{3} f_0'' + \frac{2h^4}{3} f_0''' + \frac{32h^5}{120} f_0^{(iv)} + ...)$$

$$- \left(2hf_0 + 2h^2 f_0' + \frac{4h^3}{3} f_0'' + \frac{2h^4}{3} f_0''' + \frac{20h^5}{72} f_0^{IV} + \ldots\right)$$

$$= \frac{32h^5}{120} f_0^{(iv)} - \frac{20h^5}{72} f_0^{(iv)} + \ldots$$

$$= \left(\frac{8}{30} - \frac{5}{180}\right) h^5 f_o^{(iv)} + \ldots$$

$$= - \frac{1}{90} h^5 f_0^{(iv)} \qquad \text{(P.6.33)}$$

$$= O(h^5)$$

Jadi, kaidah Simpson 1/3 untuk sepasang upaselang ditambah dengan galatnya dapat dinyatakan sebagai

$$\int_0^{2h} f(x)dx = \frac{h}{3}\ (f_0 + 4f_1 + f_2) + O(h^5)$$

Galat untuk $n/2$ pasang upaselang adalah

$$E_{tot} = -\frac{1}{90}\ h^5(f_0^{(iv)} + f_2^{(iv)} + f_4^{(iv)} + \ldots + f_{n-2}^{(iv)}) = -\frac{1}{90} h^5 \sum_{i=0,2,\ldots}^{n-2} f_i^{(iv)}$$

$$= -\frac{h^5}{90} \cdot \frac{n}{2} \cdot f^{(iv)}(t) \qquad , \qquad a < t < b$$

$$= -\frac{h^4}{180} (b - a) f^{(iv)}(t) \qquad , \text{ karena } n = (b - a)/h \qquad \text{(P.6.34)}$$

$$= O(h^4)$$

Jadi, kaidah Simpson 1/3 gabungan ditambah dengan galatnya dapat dinyatakan sebagai,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4 \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f_i + 2 \sum_{i=2,4,6}^{n-2} f_i + f_n) + O(h^4)$$

dengan kata lain, kaidah Simpson 1/3 gabungan berorde 4

Dibandingkan dengan kaidah trapesium gabungan, hasil integrasi Dengan kaidah Simpson gabungan jauh lebih baik, karena orde galatnya lebih tinggi.

Tapi ada kelemahannya, yaitu kaidah Simpson 1/3 tidak dapat diterapkan bila jumlah upaselang (*n*) ganjil.